DEVOIR MAISON IV

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Partie I : version A, deux exercices de probas discrètes.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on dispose d'une pièce amenant *Pile* avec la probabilité $1/3$.
les parties I et II de cet exercice sont indépendantes.

Partie I. Conditionnement par une loi de Poisson.

Soit λ un réel strictement positif et N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que N donne le nombre de lancers successifs de la pièce.
Autrement dit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $N = i$, alors on lance i fois de suite la pièce et on note.

- X le nombre de *Pile* obtenus lors de ces i lancers.
- Y le nombre de *Face* obtenus lors de ces i lancers.

Les différents lancers de la pièce sont indépendants.

1. Soit $i \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = i]$.

2. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

3. Prouver que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
On admet de même que Y suit la loi de Poisson de paramètre $2\lambda/3$.

4. Que vaut $X + Y$. Prouver que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

5. Toujours en considérant la variable aléatoire $X + Y$, calculer la covariance de X et de N.
Comment peut-on interpréter le signe de cette covariance ?

Partie II. Conditionnement par une loi binomiale.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite la pièce et on note N le nombre de lancers ayant amené *Face*.
On relance alors la pièce autant de fois que l'on a obtenu *Face* lors de la première série de lancers.
Autrement dit pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, si $N = i$, alors on relance i fois de suite la pièce et on note

- X le nombre de *Pile* obtenus lors de ces i lancers.
- Y le nombre de *Face* obtenus lors de ces i lancers.

Date: 26 Novembre 2025.
http://louismerlin.fr.

6. Déterminer la loi de N.

7. *Dans cette question seulement on suppose que* $n = 2$.

a. Expliciter la loi de N.

b. Déterminer la table de la loi conjointe de N et de X.

c. En déduire la loi marginale de X ainsi que la covariance de X et N.

8. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $[N = i]$.

9. Montrer que si $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$ alors :

$$\binom{i}{k}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$

10. Montrer que X suit la loi binomiale de paramètre n et $2/9$.

On admet de même que Y suit la loi binomiale de paramètre n et $4/9$.

11. Prouver que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

12. En considérant la variable aléatoire $X + Y$, calculer la covariance de X et de Y.

Comment peut-on interpréter le signe de la covariance ?

Exercice 2 **ECRICOME** 2018 Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X, puis vérifier que : $P(A) = \frac{13}{27}$.

2. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X.$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

4. **a.** On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

b. Démontrer que : $E(Y) = 2P(A) - 1$.

5. **a.** Donner la loi de X.

b. En déduire qu'on a également :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que : $E(Y) = (1-2p)^n$.

6. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.

7. Démontrer que :

$$P(A) \geqslant \frac{1}{2} \iff \left[p \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \text{"}n \text{ est pair "} \right].$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $P(A) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $E(G) \leqslant 0$).

8. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que :

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k).$$

9. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

10. Montrer que : $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$

11. Démontrer alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) \geqslant \frac{1}{2} \\ E(G) \leqslant 0 \end{array} \right. \iff p \leqslant \frac{1}{2}$$

12. **a.** Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

b. Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie IV

[1] Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris entre 1 et 200 , on note alors G_i le gain algébrique du i-ème joueur. On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

13. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i, et calculer son espérance et sa variance.

14. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $E(J) = 500$ et que $V(J) = 11250$.

1. Pour les cubes ou en regardant l'énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans le chapitre 14

15. Justifier que : $P(J \leqslant 100) \leqslant P(|J-500| \geqslant 400)$.

16. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $P(J \leqslant 100) \leqslant \frac{9}{128}$.

17. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Partie II : version B, un exercice d'oral HEC.

Exercice 3

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule ; si elle est rouge on arrête les tirages, et si elle est verte, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge. On note X le nombre de tirages effectués.

- Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- Montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.